

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 1

1. Wir spielen das Brettspiel „Siedler von Catan“. Das Spielbrett besteht aus Landschaften, die mit ganzen Zahlen zwischen 2 und 6 bzw. 8 und 12 versehen sind. In jeder Runde wird mit zwei Würfeln gewürfelt, und diejenigen Landschaften bringen Erträge, deren Zahl mit der Summe der Augenzahlen übereinstimmt.
 - a) Wähle den Grundraum $\Omega := \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$. Identifiziere das Ereignis „die 9er Landschaften bringen Erträge“ mit einer Teilmenge von Ω .
 - b) Welche Landschaften (d.h. mit welcher Augenzahl) bringen voraussichtlich am häufigsten bzw. am seltensten Ertrag? Warum?
 - c) Ein Spieler hat die Wahl: Entweder erhält er in der Zukunft den Ertrag einer 8er Landschaft, oder alle Erträge von einer 12er und einer 4er Landschaft. Was soll er wählen und warum? (Wir nehmen an, dass die Charakteristik der Landschaft, d.h. die Sorte der „Rohstoffe“, bei der Entscheidung keine Rolle spielt.)
2. Wir betrachten drei zunächst leere Urnen und eine Kugel. Es wird einmalig eine faire Münze geworfen. Erscheint „Zahl“, so bleiben die Urnen leer. Erscheint „Kopf“, dann wird die Kugel in eine der drei Urnen gelegt; hierbei wird Urne 1 mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ gewählt, Urnen 2 und 3 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-p}{2}$. Die nachfolgenden Fragen beziehen sich auf den Zustand nach dem obigen Experiment.
 - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich in Urne 1 eine Kugel?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich weder in Urne 1 noch in Urne 2 eine Kugel?
 - c) Wir öffnen nun Urne 1 und sehen, dass sich darin keine Kugel befindet. Gegeben diese Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in einer der drei Urnen?
 - d) Wir öffnen nun zusätzlich Urne 2 und sehen, dass sich auch darin keine Kugel befindet. Gegeben diese Information, mit welcher Wahrscheinlichkeit (in Abhängigkeit von p) befindet sich nun eine Kugel in Urne 3?

Siehe nächste Seite!

3. Für eine externe Benutzergruppe, der auch Urs angehört, stehen an der ETH vier Rechner zur Verfügung, wobei jedem Benutzer beim Einloggen jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ unabhängig von den anderen einer der Rechner zugeteilt wird. Es kann also durchaus vorkommen, dass mehrere Leute auf dem gleichen Rechner arbeiten.

- a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Person auf dem gleichen Rechner arbeitet wie Urs, wenn ausser ihm genau 10 Personen eingeloggt sind?

Tipp: Betrachte S_n als die Zufallsvariable, die die Anzahl der Personen auf Urs' Rechner bei n eingeloggten Personen modelliert.

- b) Wieviele Leute dürfen sich ausser Urs noch einloggen, damit er mindestens mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ allein auf einem Rechner arbeitet?
- c) Wir nehmen nun an, dass jeder Rechner unabhängig von den anderen nur mit Wahrscheinlichkeit 0.9 funktioniert, wobei die Benutzer analog wie vorher auf die funktionierenden Rechner "verteilt" werden (d.h. wenn gewisse Rechner nicht funktionieren, werden die Benutzer auf die verbleibenden verteilt). Gegeben, dass ausser Urs drei Leute eingeloggt sind und genau zwei davon auf dem gleichen Rechner arbeiten wie er, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Rechner funktionieren?

Tipp: Sei X die Anzahl funktionierender Rechner und S_3 die Anzahl der Personen, die ausser Urs auf seinem Rechner arbeiten. Bestimme für $k = 2, 3, 4$ die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(S_3 = 2 | X = k)$ aus der Annahme, wie die Benutzer auf die Rechner verteilt werden, und benutze diese Wahrscheinlichkeiten, um mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(S_3 = 2)$ zu berechnen. Mit dem Satz von Bayes erhält man dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

4. Max und Moritz analysieren die Chancen des Fussballclubs Manchester City, das Viertelfinale der Champions League 2020 zu erreichen. Als Abschätzung nehmen die beiden an, dass der Club beide Spiele (d.h. Auswärts- und Heimspiel) des Achtelfinals gegen Real Madrid gewinnen muss, um es in das Viertelfinale zu schaffen. Sollte jede der Mannschaften genau eines der Spiele gewinnen, so wird das Weiterkommen per Elfmeterschiessen entschieden. Mit A und H bezeichnen sie das Ereignis, dass Manchester City das Auswärts- bzw Heimspiel gewinnt. Einem Online-Wettbüro entnehmen sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(H) = \frac{2}{3}.$$

Kommt es zum Elfmeterschiessen, so gewinnt das Manchester City mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Ausserdem bezeichnen sie mit V das Ereignis, dass Manchester City das Viertelfinale erreicht.

- a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Manchester City das Viertelfinale *nach dem Elfmeterschiessen* erreicht, unter der Annahme, dass die Ereignisse A und H (stochastisch) unabhängig sind.

Siehe nächste Seite!

- b)** Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass Manchester City das Viertelfinale erreicht, unter der Annahme, dass die Ereignisse A und H (stochastisch) unabhängig sind.
- c)** Das Auswärtsspiel resultiert in einem Sieg für Manchester City. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass der Club das Viertelfinale erreicht bzw. nicht erreicht, gegeben dieses Ergebnis der Hinrunde, d.h. bestimme $\mathbb{P}(V|A)$ und $\mathbb{P}(V^c|A)$.
- d)** Nehmen wir an, Manchester City hätte das Auswärtsspiel verloren. Wie gross wäre die Wahrscheinlichkeit, dass der Club dennoch ins Viertelfinale kommt, d.h. wie gross ist $\mathbb{P}(V|A^c)$?